

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta stavební
Ústav stavební mechaniky



POSTUP PŘI VÝPOČTU PRUTOVÉ KONSTRUKCE OBECNOU DEFORMAČNÍ METODOU

Petr Frantík

Obsah

1	Vytvoření modelu	2
2	Styčnické vektory modelu	2
3	Lokální matice a vektory prutů	2
4	Transformace lokálních veličin prutů na globální	3
5	Sestavení matice a vektorů modelu	3
6	Výpočet vektoru posuvů řešením soustavy rovnic	4
7	Sestavení a transformace koncových posuvů prutů	4
8	Výpočet celkových koncových sil	4
9	Vykreslení vnitřních sil	4

1 Vytvoření modelu

Model konstrukce se skládá ze styčníků a prutů. Musí mít takové statické vlastnosti, jaké má konstrukce. Například, tam kde má konstrukce vnitřní kloub, má ho i model a naopak. Provedou se následující kroky:

- Zvolení polohy *styčníků*. Styčnky umísťujeme do podpor, spoju prutů a na jejich konce. Očíslujeme je. Známe dva druhy styčníků: styčník s obecně třemi neznámými posuvy u_a, w_a, φ_a (alespoň jeden prut je k němu připojen monoliticky) a styčník s obecně dvěma neznámými posuvy u_a, w_a (žádný prut k němu není připojen monoliticky)¹. Neznámé posuvy lze eliminovat okrajovými podmínkami (vnější podpory).
- Propojení styčníků *pruty*. Prut je pouze přímý s konstantní tuhostí, oba konce jsou připojeny do styčníků. Připojení je buď *monolitické* (vetknutí) nebo *kloubové*. V závislosti na způsobu připojení rozeznáváme čtyři druhy prutů: monolitický, s levostranným kloubem, s pravostranným kloubem a oboustranný kloubový.
- Rozdělení zatížení do dvou skupin: na *styčnicková zatížení* (síly a momenty působící ve styčnicích) a *prutová zatížení*. Osamělé zatížení (síla nebo moment) se může nacházet pouze na jedné součásti modelu (prutu nebo styčnicku).

Poznámka: V rámci podmínky funkčnosti modelu lze přetvárnou neurčitost měnit přidáváním či odebráním kloubů v místech připojení prutů ke styčnickům – uvolnění pootočení styčnicku.

2 Styčnickové vektory modelu

S ohledem na vytvořený model se provede:

- Sestavení vektoru neznámých posuvů $\{\mathbf{r}\}$ sjednocením neznámých posuvů všech styčníků. Vektor $\{\mathbf{r}\}$ určuje pořadí veličin v maticích a vektorech modelu.
- Sestavení vektoru styčnickových zatížení $\{\mathbf{S}\}$ (s pořadím dle vektoru $\{\mathbf{r}\}$). Zatížení se vkládá do vektoru v deformační konvenci.

3 Lokální matice a vektory prutů

Bereme postupně každý prut ab modelu a sestavujeme²:

- Lokální matici tuhosti prutu $[\mathbf{K}_{ab}^*]$ podle způsobu připojení ke styčnickům. Její sloupce označíme koncovými posuvy $u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b$ a její řádky označíme příslušností k podmínice rovnováhy $X_a, Z_a, M_a, X_b, Z_b, M_b$.

¹Index a je číslo styčnicku.

²Označením ab myslíme indexy styčnicků k nimž je prut připojen.

$$[\mathbf{K}_{ab}^*] = \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix} \begin{bmatrix} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

- Lokální vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*\}$. V případě, že je na prutu víc než jedno zatížení, pak je tento vektor výsledkem součtu koncových sil pro všechna zatížení. Řádky označíme příslušností k podmínce rovnováhy $X_a, Z_a, M_a, X_b, Z_b, M_b$.

$$\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*\} = \begin{matrix} X_a \\ Z_a \\ M_a \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \left(\right) \\ \left(\right) \\ \left(\right) \\ \left(\right) \\ \left(\right) \\ \left(\right) \end{matrix} \right\}$$

Poznámka: Využívejte možností kontroly. Matice tuhosti je symetrická, její struktura je obrazem způsobu připojení prutů na styčníky (nulové momentové tuhosti pro kloubové připojení). U vektoru primárních sil kontrolujte znaménka s ohledem na reakce, které u prutu zatížení vyvolává. Příčné zatížení vyvolává reakce Z, M a podélné zatížení reakce X .

4 Transformace lokálních veličin prutů na globální

Pro každý prut ab modelu:

- Určíme transformační úhel prutu γ_{ab} a sestavíme transformační matici prutu $[\mathbf{T}_{ab}]$. Při určení transformačního úhlu je třeba dát pozor na směr otáčení a střed otáčení, kterým je styčník a .
- Vypočteme globální matici tuhosti prutu $[\mathbf{K}_{ab}]$ dle vztahu $[\mathbf{K}_{ab}] = [\mathbf{T}_{ab}]^T [\mathbf{K}_{ab}^*] [\mathbf{T}_{ab}]$. Násobení provádíme postupně (tj. nadvakrát). Pořadí součinitelů nelze změnit. Výslednou globální matici opatříme stejně jako lokální matici označením řádků a sloupců.
- Vypočteme globální vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ ze vztahu $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\} = [\mathbf{T}_{ab}]^T \{\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*\}$. Výsledný vektor rovněž opatříme označením.

Poznámka: Proveďte kontrolu jako v minulé části.

5 Sestavení matice a vektorů modelu

Velikost matice a vektorů modelu, obsah i jejich popis se řídí vektorem neznámých posuvů $\{\mathbf{r}\}$, který byl sestaven na začátku.

- Sestavíme matici tuhosti modelu $[\mathbf{K}]$. Nejprve pro matici rezervujeme prostor a poté označíme řádky a sloupce (dle vektoru $\{\mathbf{r}\}$). Procházíme všechny globální matice tuhosti prutu $[\mathbf{K}_{ab}]$ a vybíráme z nich všechny prvky se shodnými adresami jako v matici modelu. Tyto prvky do matice modelu postupně přičítáme k počáteční nulové hodnotě. Adresy hledáme pomocí dříve provedeného označení řádků a sloupců.
- Analogicky sestavíme vektor primárních koncových sil modelu $\{\overline{\mathbf{R}}\}$. Rezervujeme pro něj prostor, označíme řádky a procházíme všechny globální vektory $\{\overline{\mathbf{R}}_{ab}\}$.
- Vypočteme vektor zatížení $\{\mathbf{F}\}$ ze vztahu $\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{S}\} - \{\overline{\mathbf{R}}\}$.

Poznámka: Výsledná matice tuhosti modelu musí být symetrická. Vektor $\{\mathbf{F}\}$ se také nazývá vektor pravých stran.

6 Výpočet vektoru posuvů řešením soustavy rovnic

Vyřešíme soustavu lineárních rovnic $[\mathbf{K}]\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{F}\}$. Je-li počet rovnic větší než dva, proveďte výpočet na počítači³.

Poznámka: V případě potřeby ověříte správnost řešení soustavy zpětným dosazením do rovnic. Výsledné posuvy si znázorníte na konstrukci a porovnejte s předpokládaným výsledkem.

7 Sestavení a transformace koncových posuvů prutů

- Pro každý prut sestavíme globální vektory koncových posuvů $\{\mathbf{r}_{ab}\}$.
- Vypočteme lokální vektor koncových posuvů $\{\mathbf{r}_{ab}^*\}$ ze vztahu $\{\mathbf{r}_{ab}^*\} = [\mathbf{T}_{ab}]\{\mathbf{r}_{ab}\}$.

8 Výpočet celkových koncových sil

Pro dokončení úlohy je třeba pro každý prut ab :

- Vypočítat lokální vektor sekundárních koncových sil $\{\widehat{\mathbf{R}}_{ab}^*\} = [\mathbf{K}_{ab}^*]\{\mathbf{r}_{ab}^*\}$.
- Vypočítat lokální vektor celkových koncových sil $\{\mathbf{R}_{ab}^*\} = \{\overline{\mathbf{R}}_{ab}^*\} + \{\widehat{\mathbf{R}}_{ab}^*\}$.

Poznámka: Sekundární koncové síly lze opět zkontrolovat úvahou o rozdělení reakcí. Tyto reakce musí být samy se sebou v rovnováze (pozor na nesymetricky připojené pruty).

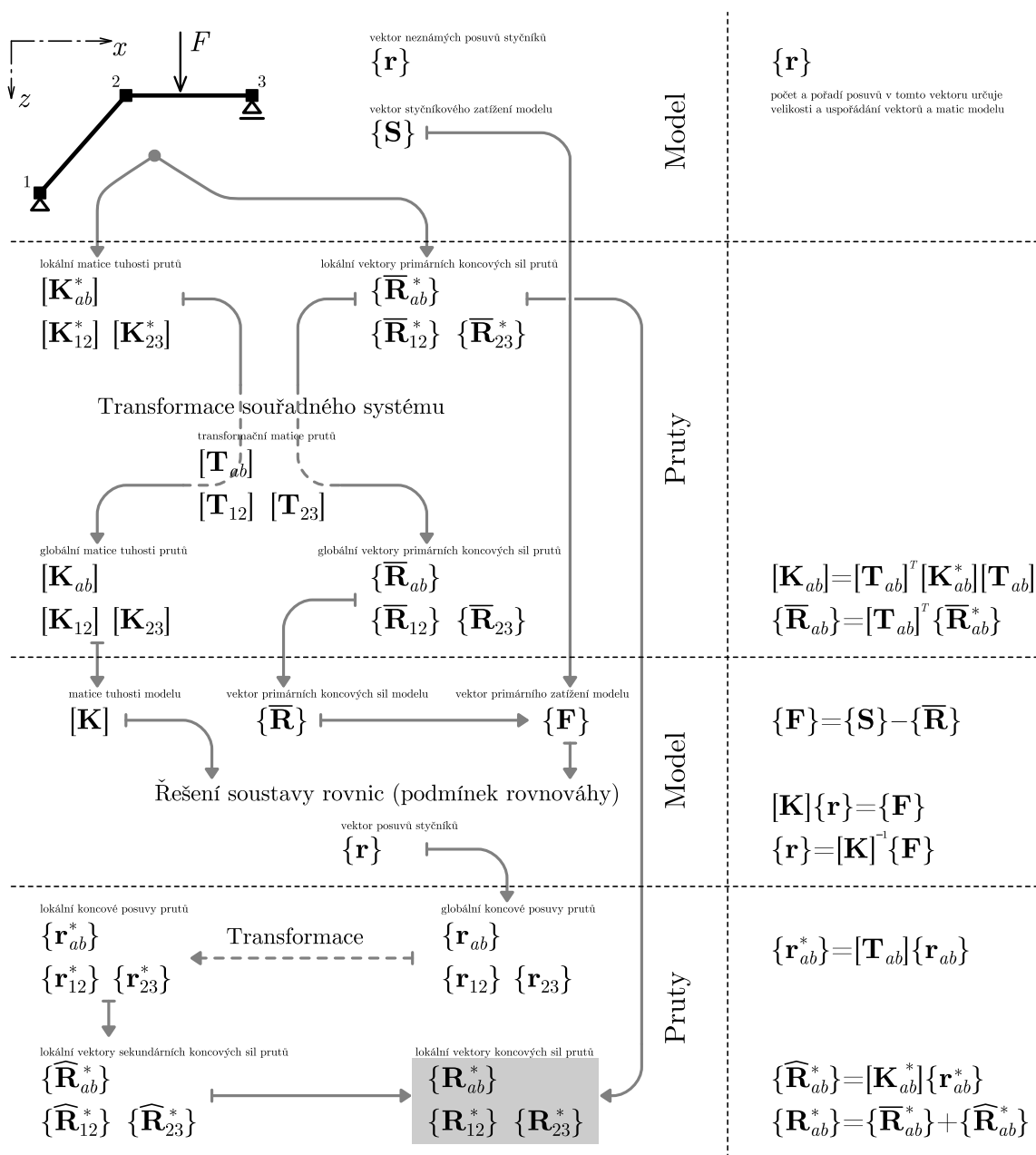
9 Vykreslení vnitřních sil

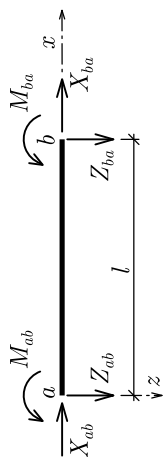
- Vektor celkových koncových sil $\{\mathbf{R}_{ab}^*\}$ přepíšeme do silové konvence. Převod se provádí změnou znaménka u prvních tří hodnot vektoru, tj. u veličin X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab} .

³Lze užít běžně dostupného tabulkového procesoru, popřípadě webových aplikací dostupných na internetu.

- Na osově schéma konstrukce vynášíme s ohledem na znaménka hodnoty koncových sil. Jejich propojení do grafu se provádí podle prutového zatížení. Vyžaduje-li to charakter zatížení, je třeba dopočítat významné mezilehlé body (v místě osamělého zatížení, extrémy, pro vykreslení parabol).

Poznámka: Kontrolujeme konzistenci výsledků: Funkce posouvajících sil jsou derivací funkce momentů. Funkce normálových i posouvajících sil musí odpovídat poloze a velikosti zatížení. Funkce momentů musí být vyneseny na správné straně; reflektují deformaci konstrukce.





Vektor primárních koncových sil prutu ab
 $\{\mathbf{R}_{ab}^*\} = \{ \bar{X}_{ab}^* \quad \bar{Z}_{ab}^* \quad \bar{M}_{ab}^* \quad \bar{X}_{ba}^* \quad \bar{Z}_{ba}^* \quad \bar{M}_{ba}^* \}^T$

Zatížení na prutu	a b	a b	a b	a b	Petr Frantík
	$\begin{Bmatrix} -F_x b/l \\ -F_z b^2(l+2a)/l^3 \\ F_z ab^2/l^2 \\ -F_x a/l \\ -F_z a^2(l+2b)/l^3 \\ -F_z a^2 b/l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b/l \\ -F_z b^2(3l-b)/(2l^3) \\ 0 \\ -F_x a/l \\ -F_z a(3l^2-a^2)/(2l^3) \\ -F_z ab(l+a)/(2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b/l \\ -F_z b(3l^2-b^2)/(2l^3) \\ F_z ab(l+b)/(2l^2) \\ -F_x a/l \\ -F_z a^2(3l-a)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b/l \\ -F_z b^2(3l-b)/(2l^3) \\ 0 \\ -F_x a/l \\ -F_z a(3l^2-a^2)/(2l^3) \\ -F_z ab(l+a)/(2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -F_x b/l \\ -F_z b/l \\ 0 \\ -F_x a/l \\ -F_z a/l \\ 0 \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -5ql/8 \\ -ql^2/8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -5ql/8 \\ ql^2/8 \\ -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -3ql/8 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -5ql/8 \\ -ql^2/8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \\ -nl/2 \\ -ql/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -6Mab/l^3 \\ Mb(2l-3b)/l^2 \\ 0 \\ 6Mab/l^3 \\ Ma(2l-3a)/l^2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ 0 \\ 0 \\ 3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ M(l^2-3a^2)/(2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ M(l^2-3b^2)/(2l^2) \\ 0 \\ 3M(l^2-b^2)/(2l^3) \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ 0 \\ 0 \\ 3M(l^2-a^2)/(2l^3) \\ M(l^2-3a^2)/(2l^2) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -M/l \\ 0 \\ 0 \\ M/l \\ 0 \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 0 \\ EI\alpha_t \Delta t_1/h \\ -EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 0 \\ -EI\alpha_t \Delta t_1/h \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ 0 \\ -EA\alpha_t \Delta t_0 \\ -3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ -3EI\alpha_t \Delta t_1/(2h) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_t \Delta t_0 \\ -3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ 3EI\alpha_t \Delta t_1/(2h) \\ -EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ 0 \\ -EA\alpha_t \Delta t_0 \\ -3EI\alpha_t \Delta t_1/(2hl) \\ -3EI\alpha_t \Delta t_1/(2h) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha_t \Delta t_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Reference

Kadlčák, J., Kytýr, J.: Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce. Učebnice. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 1998, 2010.

Kadlčák, J., Kytýr, J.: Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2001, 2009.

Kytýr, J., Frantík, P.: Statika II. Rozšířený průvodce. Studijní opora. FAST VUT v Brně, 2006.

Poděkování

Jirkovi Kytýrovi za výbornou výuku.
Janu Pláškoví za nalezení chybného označení.
Kolegům a studentům za podporu.

Pomůcky

Java aplikace MaFoDeM pro analýzu konstrukcí pomocí deformační metody.
<http://www.kitnarf.cz/mafodem>

Java aplikace ForMet pro analýzu konstrukcí pomocí silové metody.
<http://www.kitnarf.cz/formet>

Online JavaScript aplikace STRIAN pro analýzu konstrukcí pomocí deformační metody.
<http://www.kitnarf.cz/strian>